

Άσκηση 1: Να αναπεί η τ.φ. $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : q(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2$
 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

βρες κύριους άξονες τους οποίους και να προσδιορίσετε. Να
 σχεδιάσει (προσεχ) το χρόσημο της κανονικής τομής $q(x,y) = 8$

1^ο βήμα: προσδιορίσω τον πίνακα A

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

2^ο βήμα: Τον διαγωνοποιώ

Ιδιοτιμές!

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 5-x & -3 \\ -3 & 5-x \end{vmatrix} = (5-x)^2 - 9$$

$$\text{Άρα } (5-x)^2 - 3^2 = (5-x-3)(5-x+3) = (2-x)(8-x)$$

Οι ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2$
 $\lambda_2 = 8$ } $\Rightarrow$ απλές ιδιοτιμές
 Δεν χρειάζεται G-S. μέθοδο

$$v(2) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \mid (A - 2I)x = 0_{2 \times 1} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$v(8) : \begin{cases} -3x - 3y = 0 \\ -3x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -y, y = k \in \mathbb{R}$$

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -k, y = k \right\}_{k \in \mathbb{R}} = \left\{ k(-1, 1), k \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

↗ βάση
 x_2 ↙

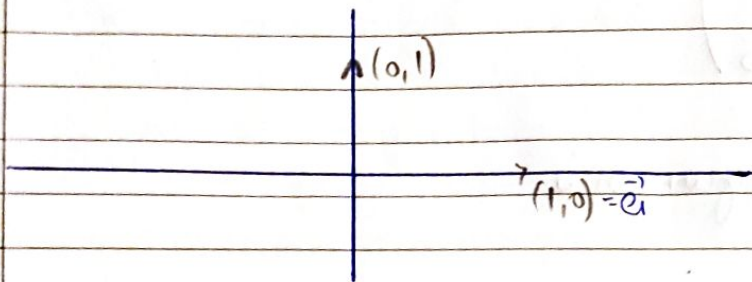
$$\Rightarrow \text{κανονικοποίηση} : \frac{\vec{x}_1}{\|\vec{x}_1\|}, \frac{\vec{x}_2}{\|\vec{x}_2\|} \quad \left\{ \vec{e}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), \vec{e}_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \right\} \text{ κύριοι άξονες, } \text{cm } q$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \leadsto {}^t P A P = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

και η q παίρνει τη μορφή $q(\tilde{x}) = 2(x')^2 + 8(y')^2$

Θέλουμε αναγνώριση του $2(x')^2 + 8(y')^2 = 8 \Leftrightarrow$

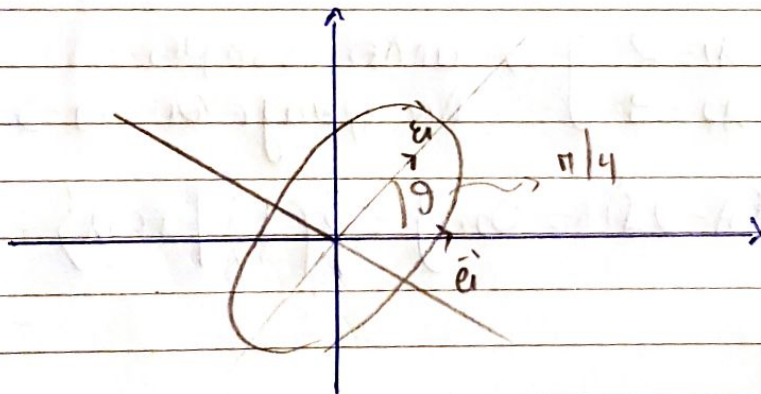
$$\Leftrightarrow \frac{(x')^2}{2^2} + \frac{(y')^2}{1} = 1 \quad : \text{έλλειψη}$$



Για την σχεδιάσει πρέπει να βρούμε την γωνία

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1' \rangle}{\|\vec{e}_1\| \|\vec{e}_1'\|} = (1,0)(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_1')$



Άσκηση 2: Ομοίως $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $q(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz$
 $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

Εξάγουμε $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_A = 0$ Σημεία $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (2-\lambda)^2(4-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ (διπλό) $\rightarrow$ Όχι ορθό Gram-μεικτό
 $\lambda = 4$ (απλό)

$\underline{V(2)}: \begin{cases} x - z = 0 \\ 0 = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = k \\ y = \alpha \end{cases}, \alpha, k \in \mathbb{R}$

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = k, y = \alpha, z = k, k, \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(k, \alpha, k), k, \alpha \in \mathbb{R}\} =$

$= \{k(1, 0, 1) + \alpha(0, 1, 0), k, \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$

Παρατηρούμε ότι είναι Γ.Α. (Γραμμικά ανεξάρτητα)
 Από, βάση $V(2)$

$\underline{V(4)}: \begin{cases} -x - z = 0 \\ y = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}, z = k \Leftrightarrow \begin{cases} x = -k \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -k, z = k, y = 0, k \in \mathbb{R}\} = \{(-k, 0, k), k \in \mathbb{R}\} =$

$= \{k(-1, 0, 1), k \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, 0, 1) \rangle$

Βάση

$\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2$
 $V(2) = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$

$V(4) = \langle (-1, 0, 1) \rangle = \vec{e}_3$

Παρατηρούμε ότι ανα δύο τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ορθόγωνα. Από, δε
 χρειάζεται G-S μέθοδο.

Παίρνουμε τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$
 $\vec{a} = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ $\vec{b} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ $\vec{c} = (0, 1, 0)$
 $\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow q(\vec{x}) = 2(x')^2 + 2(y')^2 + 4(z')^2$$

με κύριους άξονες $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ όπως $\vec{e}_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$
 $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$
 $\vec{e}_3 = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$

Αναγωγή $q(\vec{x}) = 2$

$$\text{Άρα } 2(x')^2 + 2(y')^2 + 4(z')^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x')^2}{1^2} + \frac{(y')^2}{2^2} + \frac{(z')^2}{(1/\sqrt{2})^2} = 1$$

Ελλειψοειδές εκ περιστροφής της έλλειψης

$$\left. \begin{aligned} \frac{(x')^2}{1^2} + \frac{(z')^2}{(1/\sqrt{2})^2} &= 1, \quad y' = 0 \end{aligned} \right\} \text{ γύρω από τον άξονα } Oz$$

Αναγωγή $q(\vec{x}) = 2$

$$x^2 + y^2 + 5z^2 - 2xy - 1 + 2x - 3y$$

$$q = {}^t X A X$$

$$= {}^t X P \Delta {}^t P X$$

$$= {}^t ({}^t P X) \Delta ({}^t P X)$$

$${}^t P A P = 0 \leadsto A = P \Delta {}^t P$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\leadsto q = {}^t Z \Delta Z, \quad Z = {}^t P X$$

Άσκηση: Να αναγνωρίσει η επιφάνεια $x^2 + y^2 + z^2 - 4yz + 3x + 2y = 0$

Ορίζουμε την τ.μ. $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4yz$, $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Rightarrow Aq = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Ιδιότητες $\lambda A = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(3-\lambda(1+\lambda)) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -1$$

(αντίς)

Ιδιότητες:

$$V(1): \begin{cases} 0 = 0 \\ -2z = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = z = 0 \end{cases} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} x = k \in \mathbb{R} \\ y = z = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \{k(1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : k \in \mathbb{R}\} = \underline{\underline{\langle (1, 0, 0) \rangle}}$$

$$V(3): \begin{cases} -2x = 0 \\ y = -z \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = k \\ y = -k \end{cases} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} x = 0 \\ y = -k \\ z = k, k \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\}$$

$$= \{k(0, -1, 1), k \in \mathbb{R}\} = \underline{\underline{\langle (0, -1, 1) \rangle}}$$

|| || = $\sqrt{2}$

$$V(-1): \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = k \\ y = k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0, y = z = k \in \mathbb{R}\} = \{k(0, 1, 1), k \in \mathbb{R}\} = \underline{\underline{\langle (0, 1, 1) \rangle}}$$

Ελεγχος (μεταφ. των αξονικών)

τα κανονικοποιώ
δηλαδή ότι
διαίρω το διάνυσμα
με το μέτρο τους.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_1 = (1, 0, 0) \\ \vec{e}_2 = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \\ \vec{e}_3 = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{κύριοι} \\ \text{άξονες} \\ \text{του } q. \end{array}$$

όπου $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

και η $q(\vec{x}) = 1(x')^2 + 3(y')^2 + (-1)(z')^2$
 $= (x')^2 + 3(y')^2 - (z')^2$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4yz = (x')^2 + 3(y')^2 - (z')^2$$

Γνωρίζουμε ότι $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \end{cases}$$

ο άξονας x είναι
ο άξονας x'
επειδή ο πίνακας είναι
ορθογώνιος.

Άρα, η επιφάνεια μας είναι νέου άξονα γίνεται:

$$(x')^2 + 3(y')^2 - (z')^2 + 3x' + 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{(x')^2} + \underline{3(y')^2} - \underline{(z')^2} + \underline{3x'} - \underline{\sqrt{2}y'} + \underline{\sqrt{2}z'} = 0$$

$\Rightarrow$ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

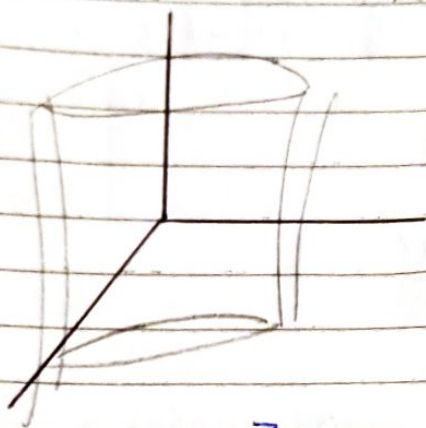
$$\begin{aligned} (x')^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x' + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3(y')^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}y' + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ - \left((z')^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}z' + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(x' + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 - 3\frac{1}{18} - \left(z' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x' + \frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 - \left(z' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{25}{18}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(x' + \frac{3}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{25/18}\right)^2} + \frac{\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2}{\left(\sqrt{25/36}\right)^2} - \frac{\left(z' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{25/18}\right)^2} = 1$$

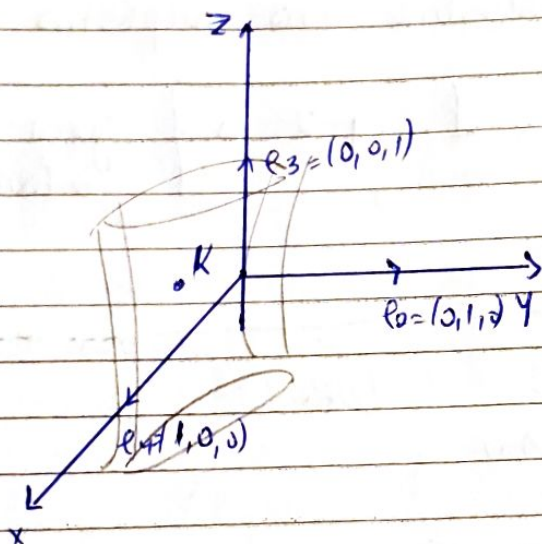
поверхность
упрощается



$$K' \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\text{т.е. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -3/2 \\ \sqrt{2}/6 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_0, y_0, z_0) K$$



Άσκηση: Να αναγνωριστεί η $x^2 + y^2 - 2z^2 - 2x - 4y - 12z - 16 = 0$

Λείγαν τα επιμέρους γινόμενα, $\rightarrow$ αμέσως γίνεται τετραγωνικό

$$x^2 + y^2 - 2z^2 - 2x - 4y - 12z - 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + (y^2 - 2 \cdot 2y + 2^2 - 2^2) - 2(z^2 + 2 \cdot 3z + 3^2 - 3^2) - 16 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 - 2(z+3)^2 = 16 + 1 + 4 - 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 - 2(z+3)^2 = 3$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{(y-2)^2}{(\sqrt{3})^2} - \frac{(z+3)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

Μετάφραση υπερβολοειδές εκ περιστροφής της υπερβολής

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(x-1)^2}{(\sqrt{3})^2} - \frac{(z+3)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1, \quad y-2=0 \end{array} \right\} \text{ ήτοι από τα} \\ \text{αξία } 0 \leq z.$$

- $x^2 + y^2 = 1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow$ κύκλος

- $x^2 + y^2 = 1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow$ οχι κύκλος

Παριστάνει κύλινδρο (ή κυλινδρική επιφάνεια)

που παραγεται από τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$, για τα διαφορά z

- $\mathbb{R}^3 \ni (x+1)^2 + (y-2)^2 = 0$

$$\Rightarrow ((x+1) - (y-2))((x+1) + (y-2)) = 0$$

$$\Rightarrow x - y + z + 1 = 0, \quad x + y - z + 1 = 0$$

- $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 : \mathbb{R}^2$ ελλειψή

$\mathbb{R}^3$ ελλειφοειδής κυλινδρική επιφάνεια

Άσκηση: Να αναγνωρίσετε η $q(x) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4x + 2y - 2z + 1 = 0$
 θεωρούμε $q(x) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 ↓
 αναγνώριση από $\otimes$.

$$A_q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \lambda(\lambda-2)^2 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 & (\text{ord } \lambda_1) \\ \lambda_2 = 2 & (\text{ord } \lambda_2) \end{matrix}$$

Βασίσις

$$v(0) = \langle \vec{a}, 1, 1 \rangle$$

$$v(2) = \langle \vec{b}, 0, -1 \rangle$$

Τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{j}$ είναι Γ.Α. (ορίζοντες $\neq 0$)

Παρατηρούμε ότι από δύο, τα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{j}$ ένα είναι πελάτι των άλλων δύο, άρα σημαίνει ότι δεν χρειάζεται 6-5 μέτρο.

Διακρίνεται με το μέτρο των:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_1 = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \\ \vec{e}_2 = (1, 0, 0) \\ \vec{e}_3 = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{οι} \\ \text{κρίνονται} \\ \text{στη } q \end{array}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \text{όπου} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \otimes$$

$$\text{Θεωρούμε } q(x) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz$$

$$\Rightarrow q(x) = 0(x')^2 + 2(y')^2 + 2(z')^2$$

και η επιβάση γίνεται

$$2(y')^2 + 2(z')^2 - 4y' + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right) - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (y'-1)^2 + (z' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1$$

$x \in \mathbb{R}$

μεταστροφή επιδότηα

για να προκύπτει από τον κύκλο

(αναπροσανατολισμού) $(y'-1)^2 + (z' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1$ για τις
διαφορές τιμών του x .

